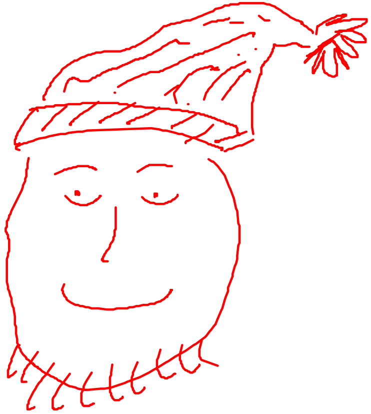
Erinnerung:

Definition: Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ist



$$\boxed{\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i}.}$$

Proposition: Es gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots\ a_{in} \\ & & & \end{pmatrix}$$

6.4 Zeilen- und Spaltenentwicklung

Konstruktion: Sei A eine $n \times n$-Matrix mit $n > 0$. Für jedes Paar von Indizes $1 \leqslant i, j \leqslant n$ sei A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A entsteht.

(*) $(n-1) \times (n-1)$ – Minoren

Satz: Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ gilt

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}).}$$

Für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$ gilt

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}).}$$

Beweis: $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma i = j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{\substack{1 \le i' \le n \\ i' \neq i}} a_{i',\sigma i'} \right)$$

Für jedes j sei π_j die zyklische Permutation $\underbrace{j \mapsto j+1 \mapsto \ldots \mapsto n \mapsto j}_{n-j+1}$.

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\pi_j) = (-1)^{n-j}$ und $\pi_j n = j$. Insbesondere $\pi_i n = i$.

Und $\sigma i = j \Leftrightarrow \sigma \pi_i n = \pi_j n \Leftrightarrow \underbrace{\pi_j^{-1} \sigma \pi_i}_{\tau} n = n \Leftrightarrow \sigma = \pi_j \tau \pi_i^{-1}$ und $\tau n = n$.

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau n = n}} \underbrace{\operatorname{sgn}(\pi_j \tau \pi_i^{-1})} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{1 \le i' \le n \\ i' \neq i}} a_{i', \pi_j \tau \pi_i^{-1} i'}} \right)$$

$\pi_i^{-1} i' = k$
$\Leftrightarrow i' = \pi_i k \neq \underset{\pi_i n}{i}$
$\Leftrightarrow k \neq n$.

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\operatorname{sgn}(\pi_j) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_i^{-1})} \underbrace{\left(\sum_{\tau \in S_n, \tau n = n} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_{\pi_i k, \pi_j \tau k} \right)}_{\tau \in S_{n-1} \quad \det(A_{ij})}$$

$\operatorname{sgn}(\pi_j) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_i^{-1}) = (-1)^{n-j} \cdot (-1)^{i-n} = (-1)^{i-j} = (-1)^{i+j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

qed.

Bsp.:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{i,j=1..n} = \begin{pmatrix} +1 & \cdots & - & - \\ -1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Definition: Die *Adjunkte* von A ist die Matrix

$$\boxed{\tilde{A} \;:=\; \left(\underline{\underline{(-1)^{i+j}}} \cdot \det(\underline{\underline{A_{ji}}})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.} \;=\; \left(\underline{\pm} \det\left(\;\right)^{j}_{i}\right)_{i,j}$$

Satz: Es gilt

$$\boxed{A \cdot \tilde{A} \;=\; \tilde{A} \cdot A \;=\; \det(A) \cdot I_n.}$$

Bew.: $\tilde{A} \cdot A = \left((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})\right)_{i,j} \cdot (a_{jk})_{j,k}$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{jk} \cdot \det(A_{ji})\right)_{i,k}$$

$i=k \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underline{\underline{a_{ji}}} \cdot \det(A_{ji}) = \det(A)$ nach Spaltenentwicklung.

$i\neq k \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underline{\underline{a_{jk}}} \cdot \det(A_{ji}) = \det\begin{pmatrix}\text{A nach Ersetzen} \\ \text{der i-ten Spalte} \\ \text{durch die k-te Spalte}\end{pmatrix} = 0$

↑ da zwei gleiche Spalten.

$\Rightarrow \tilde{A} \cdot A = \left(\det(A) \cdot \delta_{ik}\right)_{i,k} = \det(A) \cdot I_n.$

$A \cdot \tilde{A}$ analog

qed.

Erinnerung: Für je zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Satz: Eine quadratische Matrix A über einem Körper ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt weiter

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \quad \text{und}$$
$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}.$$

Bew.: A invbar $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I_n \Rightarrow A \cdot \left(\det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}\right) = I_n.$

$\Rightarrow A$ invbar. und $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}.$ qed.

Beispiel: Eine 2×2-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ über einem Körper ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ ist, und dann gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bsp.:

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

nicht ähnlich

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

6.5 Ähnlichkeit und Determinante eines Endomorphismus

Bem.: $A \sim I_n \Rightarrow A = I_n$.
denn: $A = U I_n U^{-1} = I_n$.

Sei K ein Körper.

Definition: Zwei $n \times n$-Matrizen A und B über K heissen *ähnlich* oder *zueinander konjugiert*, wenn eine invertierbare $n \times n$-Matrix U über K existiert mit $B = UAU^{-1}$.

Proposition: Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Bew.: $A = I_n \cdot A \cdot I_n^{-1} \Rightarrow A \sim A$.
$B = UAU^{-1} \Rightarrow A = U^{-1} \cdot B \cdot U = U^{-1} B (U^{-1})^{-1}$. Also gilt: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
$B = UAU^{-1}$, $C = VBV^{-1} \Rightarrow C = VUAU^{-1}V^{-1} = (VU) \cdot A \cdot (VU)^{-1}$. Also gilt $A \sim B \sim C \Rightarrow A \sim C$.
qed.

Proposition: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

Beweis: $\det(UAU^{-1}) = \det(U) \cdot \det(A) \cdot \det(U)^{-1} = \det(A)$. qed.

Proposition: Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann sind die Darstellungsmatrizen ${}_B[f]_B$ bezüglich beliebiger geordneter Basen B von V zueinander ähnlich. Insbesondere ist $\det({}_B[f]_B)$ unabhängig von B.

Bew.: $${}_{B'}[f]_{B'} = \underbrace{{}_{B'}[\mathrm{id}]_B}_{U} \cdot \underbrace{{}_B[f]_B}_{A} \cdot \underbrace{{}_{B'}[\mathrm{id}]_B^{-1}}_{U^{-1}}$$ qed.

Definition: Das Element $\det(f) := \det({}_B[f]_B) \in K$ heisst die *Determinante von f*.

Proposition: Für alle Endomorphismen f und g eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V gilt:

(a) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(b) $\det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f)$.

(c) Die Abbildung f ist ein Automorphismus genau dann, wenn $\det(f) \neq 0$ ist.

(d) Für jeden Automorphismus f gilt $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

(e) Für jeden Isomorphismus $h\colon V \xrightarrow{\sim} W$ gilt $\det(h \circ f \circ h^{-1}) = \det(f)$.

Bew.: Sei B eine geordnete Basis von V.

(a) $\det({}_B[\mathrm{id}_V]_B) = \det(I_n) = 1$.

(b) $\det({}_B[g \circ f]_B) = \det({}_B[g]_B \cdot {}_B[f]_B) = \det({}_B[g]_B) \cdot \det({}_B[f]_B) = \det(g) \cdot \det(f)$.

(c) f invertierbar $\Leftrightarrow$ ${}_B[f]_B$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det({}_B[f]_B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

(d) ...

(e) Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$

$\Rightarrow$ $B' := (h(b_1), \dots, h(b_n))$ Basis von W

mit ${}_{B'}[h]_B = I_n$.

$\Rightarrow$ $\det(h \circ f \circ h^{-1}) = \det({}_{B'}[h \circ f \circ h^{-1}]_{B'}) = \det\big(\underbrace{{}_{B'}[h]_B}_{= I_n} \cdot {}_B[f]_B \cdot \underbrace{{}_{B'}[h]_B^{-1}}_{= I_n}\big)$

$= \det({}_B[f]_B) = \det(f)$. qed